

文章编号: 1000-7598(2010)02-0455-06

循环荷载下双曲线模型修正土体一维固结解

张磊^{1,2}, 孙树林², 龚晓南¹, 张杰¹

(1. 浙江大学 软弱土与环境土工教育部重点实验室, 杭州 310058; 2. 河海大学 土木工程学院, 南京 210098)

摘要: 假定土体的应力-应变关系满足双曲线模型、渗透系数的降低与压缩系数的减小成正比以及初始有效应力沿深度均匀分布, 推导出任意荷载下单层地基的非线性一维固结方程。结合具体的定解条件采用分离变量法求出土体有效应力的通解, 并进一步求出超静孔隙水压力、按沉降定义的平均固结度 U_s 以及按孔隙水压力定义的平均固结度 U_p 的通解。根据通解求出梯形低频循环荷载作用下的解, 并找出循环荷载作用下土体固结性状的影响因素。基于循环荷载作用下的解, 采用 FORTRAN 语言编制了计算程序, 计算并分析考虑土体本构关系非线性时的固结性状, 以及反映土体本构特征参数 E 和 n 对固结性状的影响。计算结果表明: ① U_s 稍大于 U_p ; ② 距排水平面越近, 附加有效应力受加载方式的影响越明显, 距排水平面越远则相反; ③ E 和 n 对 U_s 的影响很小, 可以忽略不计; ④ E 和 n 对 U_p 和附加有效应力的影响较大且不容忽视。

关键词: 循环荷载; 一维固结; 双曲线模型; 沉降

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

Solution for one-dimensional consolidation based on hyperbola model under cyclic loading

ZHANG Lei^{1,2}, SUN Shu-lin², GONG Xiao-nan¹, ZHANG Jie¹

(1. Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Ministry of Education, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;

2. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Suppose the constitutive relation of soil to satisfy the hyperbola model. By assuming that the decrease of the hydraulic conductivity is proportional to the decrease of the compression conductivity and the distribution of initial effective pressure doesn't vary with depth, the one-dimensional nonlinear partial differential consolidation equation which is under random time-depending loading is deduced. According to the idiographic initial conditions and the boundary conditions, the equation is solved using the variable separation method. The general solution of the effective stress is achieved; and then the general solution of the excess pore pressure, the general solution of the average consolidation degree defined according to the settlement and the general solution of the average consolidation degree defined according to the excess pore pressure are achieved. Finally, the solutions under trapezium low-frequency cyclic loading are achieved using the general solutions; and the factors which influence the consolidation characters are found. Based on the solutions under low-frequency cyclic loading, the relevant computer program is developed using FORTRAN language. Using this program, the consolidation characters and the influences of the parameters E and n which reflect the constitutive relation on the consolidation characters are analyzed. The computing results show that the average consolidation degree defined according to the settlement is a little bigger than the average consolidation degree defined according to the excess pore pressure; the closer to the drainage plane, the more obviously the mode of the loading influence the additional effective stress; the influences of E and n on the average consolidation degree defined according to the settlement are so small that can be ignored; however, the influences of E and n on the average consolidation degree defined according to the excess pore pressure and the additional effective stress are bigger, so that they can not be ignored.

Key words: cyclic loading; one-dimensional consolidation; hyperbola model; settlement

1 引言

根据其作用频率, 循环荷载可分为高频、中频

和低频三类^[1]。对于高、中频循环荷载下的固结问题, 需考虑惯性力对固结性状的影响; 而对于低频循环荷载, 惯性力的影响较小, 可忽略不计, 即可以

收稿日期: 2008-09-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 50578143)。

第一作者简介: 张磊, 男, 1981年生, 博士研究生, 主要从事岩土工程研究方面的工作。E-mail: zh888lei@zju.edu.cn

按照静力固结问题进行求解。工程中常见的低频循环荷载有：海上风浪荷载、地下水水位的周期性变化引起的荷载、储油罐油面的交替升高和降低引起的荷载以及粮仓里堆粮面的变化引起的荷载等。已有很多学者对该种荷载下的固结性状进行分析^[2-6]。

非线性一维固结理论的研究始于 1965 年。Davis 等^[7]把土体孔隙比和有效应力的半对数关系引入到一维固结理论的研究中，通过假定渗透系数的降低与压缩系数的减小成正比以及初始有效应力沿深度均匀分布，得出了瞬时加载下的解析解。谢康和等求出了单步加载^[8]以及低频循环荷载^[5]下的解。徐少曼^[9]指出，在侧限压缩条件下土的垂直压力和垂直侧限应变的关系可以用双曲线进行拟合。施建勇等^[10]假定土体孔隙比和有效应力的关系满足双曲线模型，也通过假定渗透系数的降低与压缩系数的减小成正比以及初始有效应力沿深度均匀分布，求出了瞬时荷载下的解析解。张磊等^[11-12]求出了单步加载下的解，并通过计算发现，用半对数关系修正一维固结理论时，其解中没有反映土体本构特征参数，因此，不能很好地反映本构特征对固结性状的影响，而用双曲线关系时则可以。本文求出任意荷载下双曲线模型修正土体一维固结方程的通解，继而求出循环荷载下的解，并通过算例对循环荷载下的固结性状进行分析。

2 问题的描述及求解

2.1 问题的描述

本文所采用的固结模型如图 1 所示。黏土层厚度为 H ，排水条件分为单面排水和双面排水两种，地面作用荷载 $q(t)$ 。图 2 为任意荷载与时间的关系，初始值为 q_0 。图 3 为梯形低频循环荷载与时间的关系，图中 q_1 为循环荷载周期中的最大荷载； α 和 β 为梯形循环荷载的加载系数，且有 $0.5 \geq \alpha \geq 0$ ， $\beta \geq 1$ ； βt_0 为循环荷载的加载周期； N 为循环周期次数。当 $\alpha = 0$ 时，可化为矩形循环荷载的情况；当 $\alpha = 0.5$ 时，可化为三角形循环荷载的情况；当 $N = 1$ 、 $\alpha = 0$ 且 $\beta = 1$ 时，可化为恒荷载的情况。梯形循环荷载的函数表达式为

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= \frac{q_1}{\alpha t_0} [t - (N-1)\beta t_0], \\ (N-1)\beta t_0 &\leq t \leq [(N-1)\beta + \alpha]t_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= q_1, \\ [(N-1)\beta + \alpha]t_0 &\leq t \leq [(N-1)\beta + (1-\alpha)]t_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= -\frac{q_1}{\alpha t_0} [t - (N-1)\beta t_0 - t_0], \\ [(N-1)\beta + (1-\alpha)]t_0 &\leq t \leq [(N-1)\beta + 1]t_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$q(t) = 0, [(N-1)\beta + 1]t_0 \leq t \leq N\beta t_0 \quad (4)$$

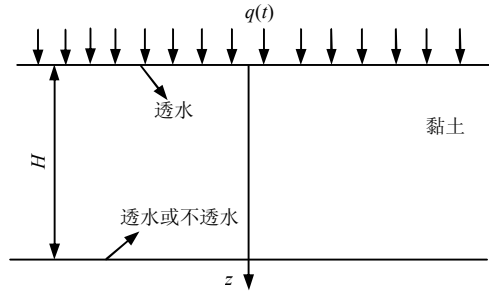


图 1 地基荷载以及边界情况

Fig.1 Loading and boundary condition of foundation

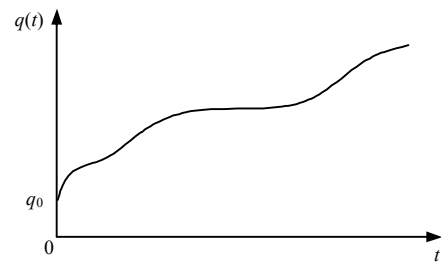


图 2 任意荷载与时间的关系

Fig.2 Relationship of random loads and time

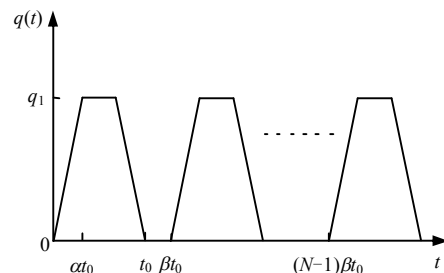


图 3 循环荷载与时间的关系

Fig.3 Relationship of cyclic loads and time

假定应力-应变满足双曲线关系：

$$\sigma' / \varepsilon = E + n\sigma' \quad (5)$$

式中： σ' 为有效应力； ε 为竖向应变； E 为土的初始切线模量； $n = 1/\varepsilon_t$ ，为最终竖向应变的倒数。当 $n = 0$ 时，应力-应变关系由非线性弹性转化为线弹性。

假定渗透系数 k 的降低和压缩系数 a_v 的减小成正比，可得土的固结系数 $C_v = k(1+e_0)/a_v$ = 常数（ e_0 为土的初始孔隙比）。进一步假定土的初始有

效应力 σ'_0 沿深度均匀分布, 可得一维固结方程为

$$-C_v E \left[\frac{1}{(E+n\sigma')^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2n}{(E+n\sigma')^3} \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \frac{E}{(E+n\sigma')^2} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (6)$$

式中: u 为超静孔隙水压力。

由有效应力原理, 得

$$u = q(t) + \sigma'_0 - \sigma' \quad (7)$$

采用变换:

$$\xi = \frac{(1+e_0)\sigma'}{E+n\sigma'} - \frac{(1+e_0)[\sigma'_0 + q(t)]}{E+n[\sigma'_0 + q(t)]} \quad (8)$$

根据式 (7), 式 (6) 可以变换为

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - f(t) \quad (9)$$

$$\text{式中: } f(t) = \frac{E(1+e_0)q'(t)}{[E+n\sigma'_0 + nq(t)]^2}。$$

$$\text{令 } Q(t) = \frac{(1+e_0)\sigma'_0}{E+n\sigma'_0} - \frac{(1+e_0)[\sigma'_0 + q(t)]}{E+n[\sigma'_0 + q(t)]}, \text{ 则有定}$$

解条件:

(1) 初始条件

$$t=0, \quad 0 \leq z \leq H, \quad u=q(0), \quad \sigma'=\sigma'_0, \quad \xi=Q(0) \quad (10)$$

(2) 顶面透水的边界条件

$$t>0, \quad z=0, \quad u=0, \quad \sigma'=\sigma'_0 + q(t), \quad \xi=0 \quad (11)$$

(3) 底面透水的边界条件

$$t>0, \quad z=H, \quad u=0, \quad \sigma'=\sigma'_0 + q(t), \quad \xi=0 \quad (12)$$

(4) 底面不透水的边界条件

$$t>0, \quad z=H, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z}=0 \quad (13)$$

2.2 方程的求解

单面排水的情况采用定解条件式 (10)、(11)、(13)。根据文献[13]所述采用分离变量法, 类似于文献[11], 可以求得任意荷载下双曲线模型修正土体一维固结方程的通解:

$$\xi(z, t) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \left[\int_0^t f(\tau) e^{C_v \left(\frac{m\pi}{2H} \right)^2 \tau} d\tau - Q(0) \right] e^{-C_v \left(\frac{m\pi}{2H} \right)^2 t} \sin \frac{m\pi z}{2H}, \quad m=1, 3, 5 \dots \quad (14)$$

由式 (8) 得有效应力:

$$\sigma' = \frac{E\xi(z, t)[E+n\sigma'_0 + nq(t)] + E(1+e_0)[\sigma'_0 + q(t)]}{E(1+e_0) - n\xi(z, t)[E+n\sigma'_0 + nq(t)]} \quad (15)$$

由式 (7) 得超静孔隙水压力:

$$u = \frac{\xi(z, t)[E+n\sigma'_0 + nq(t)]^2}{n\xi(z, t)[E+n\sigma'_0 + nq(t)] - E(1+e_0)} \quad (16)$$

进一步可求得按沉降定义的平均固结度 U_s :

$$U_s = \frac{\int_0^H \varepsilon dz}{\int_0^H \varepsilon_f dz} = \frac{\int_0^H \frac{\sigma'}{E+n\sigma'} dz - \frac{H\sigma'_0}{E+n\sigma'_0}}{\frac{(q_1 + \sigma'_0)H}{E+n\sigma'_0 + nq_1} - \frac{H\sigma'_0}{E+n\sigma'_0}} \quad (17)$$

按孔隙水压力定义的平均固结度 U_p :

$$U_p = \frac{\int_0^H [q(t) - u] dz}{\int_0^H q_1 dz} = \frac{q(t)H - \int_0^H u dz}{q_1 H} \quad (18)$$

由对称性原理, 式 (14) 中的 H 替换为 $0.5H$, 并代入式 (15) ~ (18), 即可得到双面排水时的解。

把式 (1) ~ (4) 代入通解中, 可得梯形低频循环荷载作用下的解。假设:

$$T_{mN} = \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \int_{(k-1)\beta t_0}^{[(k-1)\beta + \alpha]t_0} \frac{E(1+e_0) \frac{q_1}{\alpha t_0} e^{C_v \left[\frac{(2m-1)\pi}{2H} \right]^2 \tau}}{\left[E+n\sigma'_0 + \frac{nq_1[\tau - (k-1)\beta t_0]}{\alpha t_0} \right]^2} d\tau - \int_{[(k-1)\beta + (1-\alpha)]t_0}^{(k-1)\beta + 1]t_0} \frac{E(1+e_0) \frac{q_1}{\alpha t_0} e^{C_v \left[\frac{(2m-1)\pi}{2H} \right]^2 \tau}}{\left[E+n\sigma'_0 - \frac{nq_1[\tau - (k-1)\beta t_0 - t_0]}{\alpha t_0} \right]^2} d\tau \right\} \quad (19)$$

当 $(N-1)\beta t_0 \leq t \leq [(N-1)\beta + \alpha]t_0$ (阶段 1) 时, 有:

$$T_{m1}(t) = \int_{(N-1)\beta t_0}^t \frac{E(1+e_0) \frac{q_1}{\alpha t_0} e^{C_v \left[\frac{(2m-1)\pi}{2H} \right]^2 \tau}}{\left[E+n\sigma'_0 + \frac{nq_1[\tau - (N-1)\beta t_0]}{\alpha t_0} \right]^2} d\tau \quad (20)$$

当 $[(N-1)\beta + \alpha]t_0 \leq t \leq [(N-1)\beta + (1-\alpha)]t_0$ (阶段 2) 时, 有:

$$T_{m2}(t) = T_{m1}([(N-1)\beta + \alpha]t_0) \quad (21)$$

当 $[(N-1)\beta + (1-\alpha)]t_0 \leq t \leq [(N-1)\beta + 1]t_0$ (阶段3) 时, 有:

$$T_{m3}(t) = T_{m1}([(N-1)\beta + \alpha]t_0) - \int_{[(N-1)\beta + (1-\alpha)]t_0}^t \frac{E(1+e_0) \frac{q_1}{\alpha t_0} e^{C_v \left[\frac{(2m-1)\pi}{2H} \right]^2 \tau}}{\left[E + n\sigma'_0 - \frac{nq_1[\tau - (N-1)\beta t_0 - t_0]}{\alpha t_0} \right]^2} d\tau \quad (22)$$

当 $[(N-1)\beta + 1]t_0 \leq t \leq N\beta t_0$ (阶段4) 时, 有:

$$T_{m4}(t) = T_{m3}([(N-1)\beta + 1]t_0) \quad (23)$$

$$\xi(z, t) = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} [T_{mN} + T_{mi}(t)] e^{-C_v \left[\frac{(2m-1)\pi}{2H} \right]^2 t} \sin \frac{(2m-1)\pi z}{2H} \quad (24)$$

式中: $i=1, 2, 3, 4$, 表示处于不同的阶段。

把式(24)代入式(15)中可得到有效应力的解, 继而可得超静孔隙水压力和两个固结度的解。

当 $n=0$ 时, 任意荷载下的通解和低频循环荷载下的解都转化为相同荷载下采用线弹性本构模型时的解, 即线弹性固结解是本文解的一个特例。这证明本文所求出的解是正确的。

3 算例分析

基于解, 采用 FORTRAN 语言编制了计算程序, 并可以用该程序分析循环荷载作用下考虑土体本构关系非线性时的固结性状以及各影响因素对固结性状的影响。

图4为固结度与周期数的关系, 图5为不同位置处附加有效应力与周期数的关系。图中 N 为循环周期数。具体参数为: $E=1687.8$ kPa, $n=3.3$, $H=3.2$ m, $q_1=200$ kPa, $t_0=141.5$ d, $\sigma'_0=12.67$ kPa, $\alpha=0.3$, $\beta=1.2$ 。

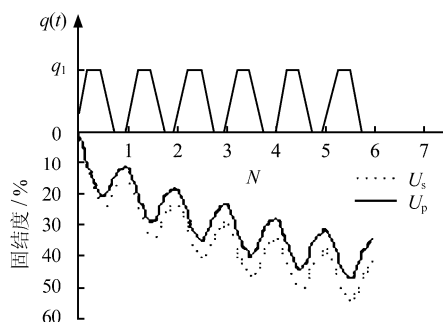


图4 固结度与周期数的关系
Fig.4 The relationship between the degree of the consolidation and the number of the periods

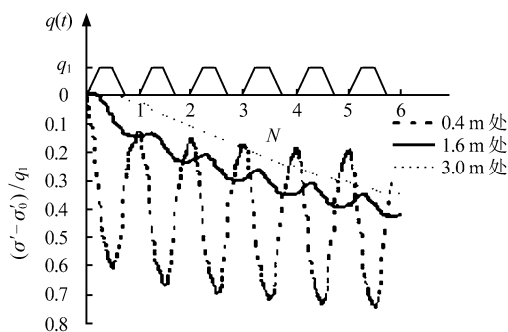
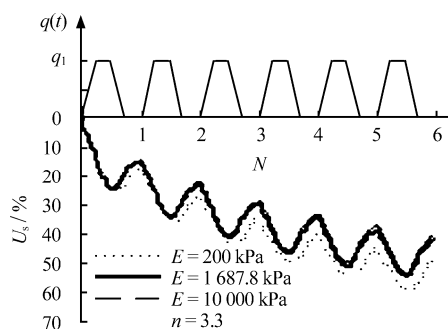
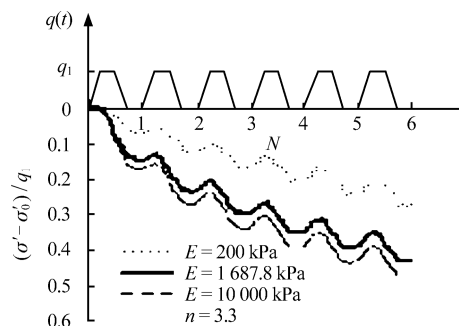
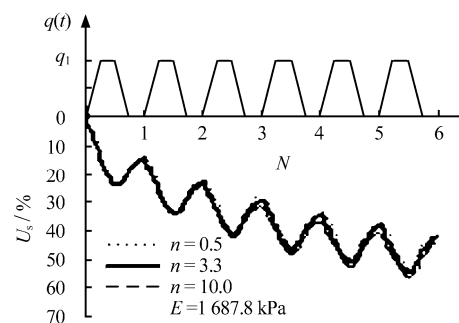
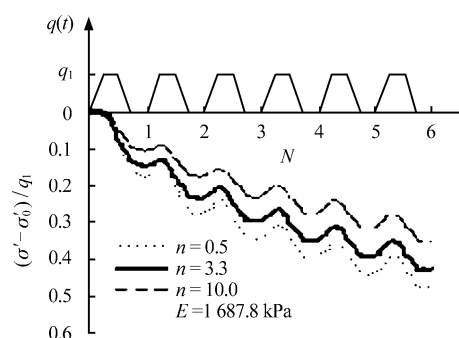
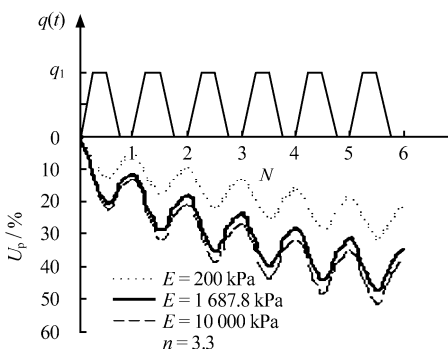
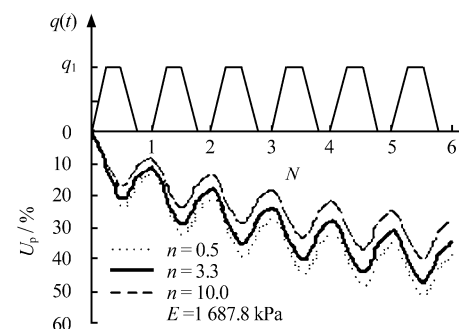


图5 附加有效应力和周期数的关系
Fig.5 The relationship between the additional effective stress and the number of the periods

从图4可以看出, 当考虑土体本构关系的非线性时, 按沉降定义的平均固结度 U_s 和按孔隙水压力定义的平均固结度 U_p 是不同的, U_s 稍大于 U_p 。从图5可以看出, 距排水平面越近, 孔隙水压力消散得越快, 附加有效应力越容易达到稳定状态, 且受加载方式的影响越明显; 距排水平面越远, 则相反。固结度和附加有效应力的值随荷载的周期性变化而发生周期性的升高和降低, 但其峰值的出现并不与荷载的转折点同步, 而是有一定的延迟, 即滞后效应, 并造成固结过程中一部分土体处于压缩状态, 另一部分则进入卸荷回弹状态。经过一定的循环周期数后, 固结度和附加有效应力将会达到一个相对稳定的状态, 即固结度和附加有效应力的峰值趋于稳定, 不再有较大的变化。

从解答可以看出, 循环荷载作用下固结性状的影响因素包括: 初始有效应力 σ'_0 , 一次循环中从加荷开始到卸荷结束的历时(由参数 t_0 或者 $T_0 = C_v t_0 / H^2$ 表征), 加荷和卸荷速率(由参数 α 表征), 一次循环的总历时(即循环周期, 由参数 β 表征), 循环次数 N 。以上各因素对固结性状的影响可参阅文献[14]。另外, 反映土体本构特征的参数 E 和 n 对固结性状也有影响, 如图6~11所示。图6、8、10中 $n=3.3$, 图7、9、11中 $E=1687.8$ kPa, 其他参数的值与图4、5中使用的参数相同。本文主要分析这两个因素对固结性状的影响。

从图6、7可以看出, E 和 n 对 U_s 的影响很小, 可以忽略不计。进一步计算表明, 本文计算出的 U_s 值与相同条件下用 $e-\lg p$ 模型^[5]和用线弹性固结理论计算出的 U_s 值是一样的。从图8~11可以看出, E 和 n 对 U_p 和附加有效应力的影响较大, 忽略其影响会产生较大的误差; E 越大, 或者 n 越小, 同一个时间点上所对应的 U_p 和附加有效应力的值就越大, 且其峰值达到稳定状态所需要的周期数就减少。

图6 E 对 U_s 的影响Fig.6 The influence of E on U_s 图10 E 对 1.6 m 处附加有效应力的影响Fig.10 The influence of E on the additional effective stress(1.6 m)图7 n 对 U_s 的影响Fig.7 The influence of n on U_s 图11 n 对 1.6 m 处附加有效应力的影响Fig.11 The influence of n on the additional effective stress(1.6 m)图8 E 对 U_p 的影响Fig.8 The influence of E on U_p 图9 n 对 U_p 的影响Fig.9 The influence of n on U_p

4 结 语

本文假定土体的应力-应变关系满足双曲线模型。通过假定地基土体在受压固结过程中渗透系数的降低和压缩系数的减小成正比, 以及初始有效应力沿深度均匀分布, 求出了任意荷载下单层地基在双面排水和单面排水条件下的通解, 继而求出了梯形低频循环荷载作用下的解。

计算结果表明: 考虑土体本构关系的非线性后, 按沉降定义的平均固结度和按孔隙水压力定义的平均固结度是不同的, U_s 稍大于 U_p ; 循环荷载作用下, 固结度和附加有效应力的值随着荷载的周期性变化, 而发生周期性的升高和降低, 其峰值的出现滞后于荷载的变化并逐渐趋近于某个稳定值; 反映土体本构特征的参数 E 和 n 对固结性状也有影响, 且其影响不可忽略。另外, 本文为了求解方便, 假定土体在压缩、回弹和再压缩的过程中, 反映土体本构特征的参数是相同的, 这与实际情况不符。因此, 有必要进一步研究土体压缩和回弹过程中反映土体本构特征的参数的变化对固结性状的影响。

参考文献

- [1] ZIENKIEWICZ C, BETTESS P. Soils and other saturated media under transient, dynamic conditions: general formulation and the validity of various simplifying assumptions[C]//Soil Mechanics-transient and Cyclic Loads. New York: John Wiley and Sons Ltd., 1982: 1—16.
- [2] WILSON N E, ELGOHARY M M. Consolidation of soils under cyclic loading[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1974, 2(3): 420—423.
- [3] BALIGH M M, LEVADOUX J N. Consolidation theory for cyclic loading[J]. **Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE**, 1978, 104(4): 415—431.
- [4] 关山海, 谢康和, 胡安峰. 低频循环荷载下地基一维固结性状分析[J]. **岩土力学**, 2003, 24(5): 849—853.
GUAN Shan-hai, XIE Kang-he, HU An-feng. Analysis of one-dimensional consolidation behavior of soils under low-frequency cyclic loading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2003, 24(5): 849—853.
- [5] 谢康和, 周瑾, 董亚钦. 循环荷载作用下地基一维非线性固结解析解[J]. **岩石力学与工程学报**, 2006, 25(1): 21—26.
XIE Kang-he, ZHOU Jin, DONG Ya-qin. Analytical solution for one-dimensional nonlinear consolidation of soil under cyclic loadings[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2006, 25(1): 21—26.
- [6] 耿雪玉, 徐长节, 蔡袁强. 循环荷载作用下饱和软黏土非线性一维固结[J]. **岩石力学与工程学报**, 2004, 23(19): 3353—3358.
GENG Xue-yu, XU Chang-jie, CAI Yuan-qiang. One-dimensional nonlinear consolidation of saturated soft clay under cyclic load[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(19): 3353—3358.
- [7] DAVIS E H, RAYMOND G P. A non-linear theory of consolidation[J]. **Geotechnique**, 1965, 15(2): 161—173.
- [8] XIE K H, LI B H, LI Q L. A nonlinear theory of consolidation under time-dependent loading[C]//Proceedings of 2nd International Conference on Soft Soil Engineering. Nanjing: Hohai University Press, 1996: 193—198.
- [9] 徐少曼. 饱和黏性土地基固结沉降量计算的归一化曲线法[J]. **岩土工程学报**, 1987, 9(4): 70—77.
- [10] 施建勇, 杨立昂, 赵维炳, 等. 考虑土体非线性特性的一维固结理论研究[J]. **河海大学学报**, 2001, 29(1): 1—5.
SHI Jian-yong, YANG Li-ang, ZHAO Wei-bing, et al. Research of one-dimensional consolidation theory considering nonlinear characteristics of soil[J]. **Journal of Hohai University**, 2001, 29(1): 1—5.
- [11] 张磊, 孙树林. 变荷载下双曲线模型修正土体一维固结理论[J]. **岩石力学与工程学报**, 2007, 26(增刊 2): 4306—4310.
ZHANG Lei, SUN shu-lin. One-dimensional consolidation theory based on hyperbola model under time-depending loading for saturated soil[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(Supp.2): 4306—4310.
- [12] 张磊, 孙树林. 两种本构模型修正土体一维固结理论比较[J]. **山西建筑**, 2007, 33(10): 142—143.
ZHANG Lei, SUN Shu-lin. The comparison between two constitutive models which modify the one-dimensional consolidation theory[J]. **Shanxi Architecture**, 2007, 33(10): 142—143.
- [13] 陈才生. 数学物理方程[M]. 南京: 东南大学出版社, 2002: 59—105.
- [14] 张磊. 广义变荷载下双曲线模型修正土体一维固结理论研究[D]. 南京: 河海大学, 2007.